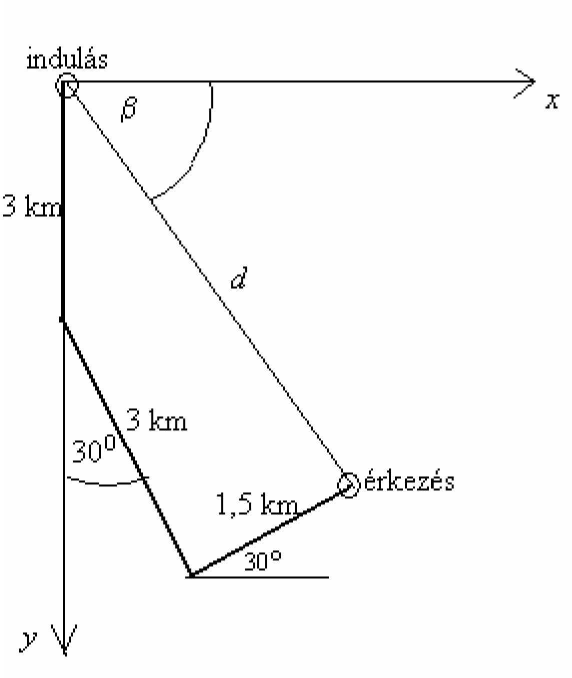
1. feladat (*Hilbert Margit*)
r = 0,3 m, v = 70 km/h = 19,44 m/s, N =65.
ω = ? φ = ? β = ? t = ?
A körmozgásra vonatkozó összefüggések felhasználásával:
$\omega = \frac{v}{r} = \underline{\underline{64{,}81\ \text{m/s}}}$. $\varphi = N\cdot 2\pi = \underline{\underline{130\pi = 408{,}2\ \text{rad}}} = 23\,400°$.
Egyenletesen gyorsuló körmozgásnál: $\varphi = \frac{\Delta\omega}{2}\cdot t$, és most $\Delta\omega = \omega$, innen $t = \frac{2\varphi}{\omega} = \underline{\underline{12{,}6\ \text{s}}}$.
Másrészről $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega}{t} = \underline{\underline{5{,}14\ \text{s}^{-2}}}$. *4*5 pont*

2. feladat (*Hilbert Margit*)
s_1= 3 km, α = 30°, s_2= 3 km, s_3= 1,5 km

d= ? β = ?

Rajzoljuk le az egymás utáni elmozdulásokat:



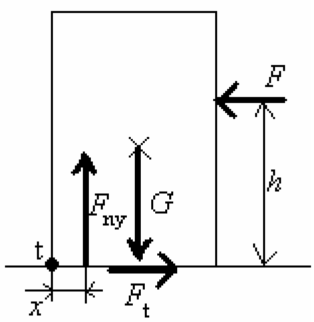
Bontsuk fel az egyes elmozdulásokat a tengelyek irányába eső összetevőkre, majd az egyirányú komponenseket adjuk össze:
x= 0 km + 3 km·sin 30°+ 1,5 km·cos 30°
x = 2,799 km, *5 pont*
y = 3 km + 3 km·cos 30°– 1,5 km·sin 30°,
y= 4,848 km. *5 pont*
A komponensekből az indulás és az érkezés közötti távolság:
$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \underline{\underline{5{,}6\ \text{km}}}$, *5 pont*
a vízszintessel bezárt szögre pedig:
$\text{tg}\,\beta = \frac{y}{x} = 1{,}732$, ahonnan $\underline{\underline{\beta = 60°}}$. *5 pont*

3. feladat (*Hilbert Margit*)

d = 1 m, G = 1000 N, s = 4,2 m, μ_0= 0,3 μ = 0,26

F_1 = ? F_2 = ? h_1= ? h_2= ? W = ?

a) A szekrény megmozdításához a tapadási erőt kell legyőzni:
$F_1 \geq F_t = \mu_0\cdot G = \underline{\underline{300\ \text{N}}}$. *4 pont*
b) A szekrény mozgatásához minimálisan akkora erőre van szükség, mint a súrlódási erő, ebben az esetben nem gyorsul a szekrény:
$F_2 \geq F_s = \mu\cdot G = \underline{\underline{260\text{N}}}$. *4 pont*
c-d) Az erők hatásvonalának magasságát az korlátozza, hogy az ne boruljon fel. Ennek megválaszolásához több irányból is eljuthatunk.



α) Feltételezzük, hogy nem gyorsul egyik esetben sem a szekrény. Ekkor a merev test egyensúlyát (a vele „együtt mozgó rendszerből” nézve) bármely tengelyre vizsgálhatjuk, ilyenkor célszerű a szekrény tőlünk távolabb eső alsó élét választani tengelynek. Ha a tolóerőt elkezdjük növelni, akkor a szekrényre a padló által ható F_{ny} tartó erő támadáspontja egyre közeledik az előbb választott tengelyhez, miközben csökken a forgatónyomatéka. A borulás pillanatában pedig rá is esik.

Az egyensúly feltétele:
$F \cdot h + F_{ny} \cdot x - G \cdot d/2 = 0$, ahol $F_{ny} = G$.

$h = \dfrac{G \cdot \left(\dfrac{d}{2} - x\right)}{F}$, innen $h \geq \dfrac{G \cdot d}{2F}$, $h_{1max} = \dfrac{G \cdot d}{2F_{1min}} = \underline{\underline{1{,}67 \text{ m}}}$. *4 pont*

β) Ha megengedjük, hogy a szekrény gyorsuló mozgást is végezzen a d) kérdésnél, akkor forgástengelyül csak a tömegközépponton átmenőt használhatunk.

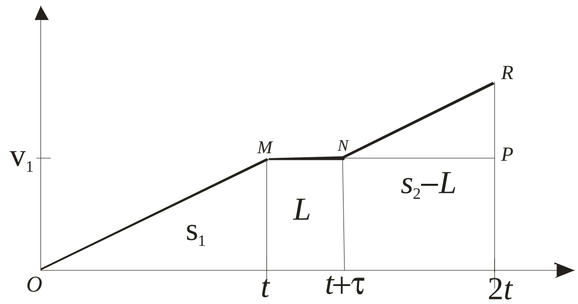
Hasonló gondolatmenettel határozhatjuk meg a hatásvonal távolságát a padlótól tolás közben (a = 0 esetben):
$h_{2max} = \dfrac{G \cdot d}{2F_{2min}} = \underline{\underline{1{,}923 \text{ m}}}$. *4 pont*

e) Ha $a = 0$, akkor $F_2 = F_s$, a végzett munka $W = F_s \cdot s = \underline{\underline{1092 \text{ J}}}$. *4 pont*

4. feladat (*Varga Zsuzsa*)

$s_1 = 400$ m, $s_2 = 1000$ m, $t_2 = t_1 = t$, $L_{kocsi} = 27{,}3$ m.
$L_{mozdony} = ?$

1. megoldás:
Rajzoljuk föl a sebesség-idő grafikont. A grafikon alatti terület a megtett út. A szerelvény hossza legyen L, és τ ideig tart a váltón az áthaladás:



$s_1 = \dfrac{v_1 t}{2}$, $\Rightarrow$ 800 m = $v_1 \cdot t$.
$L = v_1 \cdot \tau$.

Mivel a váltótól a jelzőig megtett út 1000 m, az ábárból leolvasható, hogy az NPR háromszög területe 200 m, és hasonló az OMt háromszöghöz.

Az NPR háromszög területe:

200 m = $\dfrac{a}{2}(t-\tau)^2$, másrészt s_1 = 400 m = $\dfrac{a}{2}t^2$.

Ebből $2(t-\tau)^2 = t^2$, azaz $\sqrt{2}\,(t-\tau) = t \;\Rightarrow\; \tau = (1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})t = 0{,}293t$. *15 pont*

Az első két egyenletet osztva egymással: $\dfrac{L}{2s_1} = \dfrac{\tau}{t} = (1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$, $\quad L = 2s_1(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = \underline{234{,}3 \text{ m.}}$

Ha a szerelvény n kocsiból és a mozdonyból áll (és a mozdony nem hosszabb, mint egy kocsi!):
$L_{mozdony} = L - n \cdot L_{kocsi}$. Így $n = 8$ esetében kapjuk, hogy $L_{mozdony} = \underline{\underline{15{,}9 \text{ m}}}$. *5 pont*

Megjegyzés: A t és τ közti arány meghatározásához sokféleképpen eljuthatunk, a feladat ezen része 15 pont, részpontok tetszés szerint adhatók, például a 2. megoldás szerint.

2. megoldás:
A feladat rutinból is megoldható. Az 1. megoldás jelöléseit használva:

$s_1 = \frac{a}{2}t^2$, $v_1 = a \cdot t$, *3 pont*

$L = v_1 \cdot \tau = a \cdot t\ \tau$, *3 pont*

$s_2 = L + v_1(t-\tau) + \frac{a}{2}(t-\tau)^2$. *3 pont*

Az utolsó egyenletbe behelyettesítve L, v_1 kifejezését, valamint $a = \frac{2s_1}{t^2}$ kifejezést, $\tau/t = x$–re másodfokú egyenletet kapunk:

$0 = s_1 x^2 - 2s_1 x + 3s_1 - s_2$. Behelyettesítve az adatokat: $0 = 2x^2 - 4x + 1$. *3 pont*

$x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mivel $x < 1$, csak a (–) előjel a megfelelő. *3 pont*

5. feladat (*Varga Zsuzsa*)

D = 18 N/m, d = 0,96 m, v_0 = 1,2 m/s, m_2 = 2 kg.
a. t = ?, b. W = ?, c. x_2 = ?

---

1. megoldás.
a) A feladat az első kiskocsival együtt mozgó rendszerből nézve sokkal egyszerűbb. Ebben a rendszerben a 2. (hátsó) kocsi $-v_0$ sebességgel halad, amíg a szál meg nem feszül. Amikor a gumiszál kezd nyúlni, a mozgás harmonikus rezgőmozgás lesz,

melynek szögsebessége $\omega^2 = \sqrt{\frac{D}{m}}$. *5 pont*

Ez a mozgás addig tart, amíg a gumi eléri maximális megnyúlást, majd újra húzódik össze a nyújtatlan állapotig, azaz ez egy félperiódus: $t_1 = \pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \pi\sqrt{\frac{2\,\mathrm{kg}}{18\,\mathrm{N/m}}}$ = 1,047 s. *2 pont*

Ebben a pillanatban a hátsó kocsi sebessége a mozgás szimmetriája miatt $+v_0$, és d távolságra van az első kocsitól. Mivel ettől kezdve a gumiszál laza, a találkozásig eltelt idő:

$t_2 = \frac{d}{v_0} = \frac{0{,}96\,\mathrm{m}}{1{,}2\,\mathrm{m/s}}$ = 0,8 s. *2 pont*

Tehát $t = t_1 + t_2$ = 1,047 s + 0,8 s = <u>1,847 s</u> telik el a gumi megfeszülésétől a találkozásig.
1 pont

b) Álló rendszerből nézve a hátsó kocsit 0 sebességről $2v_0$ sebességre gyorsítottuk, tehát a munkatétel alapján:

$W = \frac{1}{2}m(2v_0^2) = \frac{2\,\mathrm{kg}\cdot 4\cdot 1{,}2^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2}$ = <u>5,76 J</u>. *5 pont*

c) Az első kocsi $v_0(t_1 + t_2)$ = 1,2 m/s ·1,847 s = 2,216 m utat tesz meg a találkozásig, a hátsó kocsi ennél d távolsággal többet: 2,216 m + 0,96 m = <u>3,176 m</u> utat. *5 pont*

2. megoldás

a) Természetesen tárgyalható a feladat álló vonatkoztatási rendszerből is (semmi ötlet, induljunk a kályhától), bár kicsit hosszadalmasabb. Rögzítsük a vonatkoztatási rendszer origóját a 2. kocsi kiinduló helyzetéhez, és az időt a gumi megfeszülésétől kezdjük mérni. Eszerint egy későbbi t időpillanatban az első kocsi helykoordinátája $x_1 = v_0t + d$, a hátsó kocsié x_2. A gumiszál hossza $x_1 - x_2$. A második testre csak a rugalmas erő hat, így a mozgásegyenlete:

$ma_2 = D(x_1 - x_2 - d)$

Ez addig áll fönn, amíg a gumi megnyúlása nagyobb vagy egyenlő nulla.

Behelyettesítve

$ma_2 = D(v_0t - x_2) \quad \Rightarrow \quad ma_2 + Dx_2 = D\,v_0t.$

Leolvasható, hogy a megoldás egy harmonikus rezgőmozgás plusz egy egyenes vonalú egyenletes mozgás összege ($\omega^2 = \sqrt{\frac{D}{m}}$):

$x_2 = A \sin(\omega t + \varphi) + v_0t,$

$v_2 = A\,\omega \cos(\omega t + \varphi) + v_0$

Az amplitúdót és kezdőfázist a kezdeti feltételekből kapjuk meg: ha $t = 0$, $x_2 = 0$, $v_2 = 0$.

Behelyettesítve

$0 = A \sin \varphi$

$0 = A\,\omega \cos \varphi + v_0.$

Figyelembe véve, hogy az amplitúdó pozitív, $\varphi = \pi$, és $A = \frac{v_0}{\omega}$. Tehát a 2. test mozgása, mint az idő függvénye:

$x_2 = -A \sin \omega t + v_0t, \quad v_2 = -A\,\omega \cos \omega t + v_0, \qquad t \le \pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

Innen a megoldás azonos az 1. megoldással.

6. feladat (*Varga Zsuzsa*)

$V = 1000\ \text{m}^3$, $T_1 = 313$ K, $T_2 = 353$ K, $p = 10^5$ Pa, $M = 29$ g.

$m^+ = ?$

A hőlégballonban a levegőt úgy melegítik, hogy a hőlégballon nyitott, tehát a térfogat és a nyomás állandó a melegebb levegő esetén is (ilyenformán a melegebb levegőből kevesebb lesz a ballonban). *5 pont*

Legyen a ballon egyéb részeinek tömege m_0, a bezárt levegő tömege 313 K-nél m_1, 353 K hőmérsékletnél m_2. A ballonra ható felhajtóerő F_f nem függ a hőmérséklettől. A ballonra ható erők egyensúlya a két hőmérsékleten:

$m_0g + m_1g = F_f,$

$m_0g + m_2g + m^+g = F_f,$ *5 pont*

A két egyenletet kivonva egymásból

$m^+ = m_1 - m_2.$

A levegő tömegét az állapotegyenletből határozhatjuk meg: $pV = \frac{m_1}{M}RT_1$, és hasonlóan a 2. állapotra. Behelyettesítve:

$$m^+ = \frac{pVM}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \frac{10^5\ \text{Pa} \cdot 10^3\ \text{m}^3 \cdot 29 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}{8{,}31\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}\left(\frac{1}{313\,\text{K}} - \frac{1}{353\,\text{K}}\right) = \underline{\underline{126\ \text{kg}}}.$$ *5 pont*

7. feladat (*Hilbert Margit*)

$A = 0{,}030\ \text{m}^2$, $h_1 = 1\ \text{m}$, $h = 1{,}5\ \text{m}$, $d = 0{,}2\ \text{mm}$, $\rho = 2702\ \text{kg/m}^3$,

$c_{\text{Al}} = 900{,}21\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}}$, $c_{\text{p}} = 1038\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}}$, $c_{\text{v}} = 741\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}}$, $G = 30\ \text{N}$, $m = 40\ \text{kg}$,

$T_1 = 20\ ^\circ\text{C} = 293\ \text{K}$, $T_2 = 100\ ^\circ\text{C} = 373\ \text{K}$,
$p_0 = 10^5\ \text{Pa}$

$N = ?$ $Q = ?$ $\Delta E_{\text{gáz}} = ?$ $\Delta E_{\text{hd}} = ?$ $\Delta E_{\text{hm}} = ?$ $\Delta E_{\text{Al}} = ?$ $\Delta E_{\text{légkör}} = ?$ $\Delta E_{\text{Al}}/Q = ?$

A folyamat során a gáz nyomása állandó, melynek értéke:
$p = p_0 + (G + mg)/A = 114\ \text{kPa}$.

Az állapotegyenlet felhasználásával: $p\cdot A\cdot h_1 = N\cdot k\cdot T_1$, innen $N = \dfrac{p\cdot A\cdot h_1}{k\cdot T_1} = \underline{\underline{8{,}46\cdot 10^{23}}}$. *5 pont*

Vagyis $n = N/N_A = 1{,}411\ \text{mol}$, $m_{N2} = 38{,}33\ \text{g}$.
Mivel az alumínium jó hővezető, feltételezhetjük, hogy melegítés közben a teljes tömege fel fog melegedni. Biztos, hogy a külső légkörrel érintkező rész közben hűlni is fog, az ebből adódó veszteséget hanyagoljuk el. Az alumínium burkolat tömegének ismeretében kiszámolhatjuk az általa felvett hőt:

$m_{\text{Al}} = (2A + 2\pi\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}\cdot h)\cdot d\ \rho = \underline{0{,}53\ \text{kg}}$, $Q_{\text{Al}} = c_{\text{Al}}\ m_{\text{Al}}\ (T_2 - T_1) = 38170\ \text{J}$.

A tartály belsejébe vezetett hő fogja felmelegíteni állandó nyomáson a nitrogén gázt és az alumíniumot is:
$Q = c_{\text{p}}\cdot m_{N2}\ (T_2 - T_1) + c_{\text{Al}}\ m_{\text{Al}}\ (T_2 - T_1) = \underline{\underline{41{,}43\ \text{kJ}}}$. *5 pont*
Ennek a hőnek a révén megnövekedett az energiája a nitrogén gáznak, a külső levegőnek (hiszen munkát végeztünk rajta), az alumínium borításnak, a dugattyúnak és a tehernek (az utóbbi kettőnek a helyzeti energiája nőtt meg, az összes többinek pedig a belső energiája):
Az energiák kiszámítása előtt célszerű kiszámítani a dugattyú helyzetét a véghőmérséklet esetében:

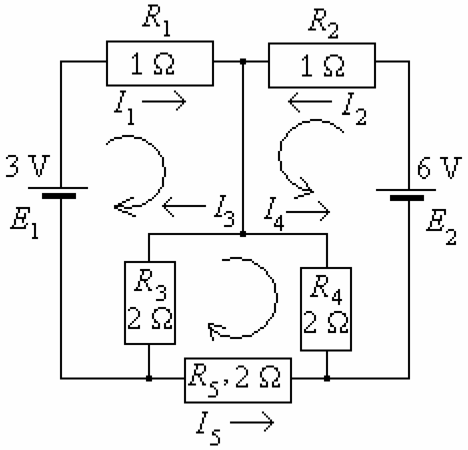
A Boyle-Mariotte törvényből: $\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_2}{T_2}$, (és $V_2 = A\ h_2$) innen: $h_2 = h_1\cdot T_2/T_1 = \underline{1{,}273\ \text{m}}$, $\Delta h = \underline{0{,}273\ \text{m}}$.

$\Delta E_{\text{gáz}} = c_{\text{v}}\cdot m_{N2}\ (T_2 - T_1) = \underline{\underline{2331{,}5\ \text{J}}}$, $\Delta E_{\text{hd}} = G\cdot\Delta h = \underline{\underline{8{,}19\ \text{J}}}$,
$\Delta E_{\text{hm}} = m\cdot g\cdot\Delta h = \underline{\underline{107{,}13\ \text{J}}}$, $\Delta E_{\text{Al}} = c_{\text{Al}}\ m_{\text{Al}}\ (T_2 - T_1) = \underline{\underline{38170\ \text{J}}}$,
$\Delta E_{\text{légkör}} = p_0\cdot\Delta V = \underline{\underline{819\ \text{J}}}$. *6 pont*
Ebből jól látszik, hogy a betáplált hő igen jelentős része az alumínium lemez melegítésére fordítódik:
$\Delta E_{\text{Al}}/Q = \underline{\underline{92{,}1\ \%}}$. *4 pont*

8. feladat (*Hilbert Margit*)

Tekintettel a sok azonos értékre a megoldás előtt vezessünk be általános jelöléseket az ábra szerint:
$R_1 = R_2 = 1\ \Omega$, $R_3 = R_4 = R_5 = 2\ \Omega$
$E_1 = 3\ \text{V}$, $E_2 = 6\ \text{V}$

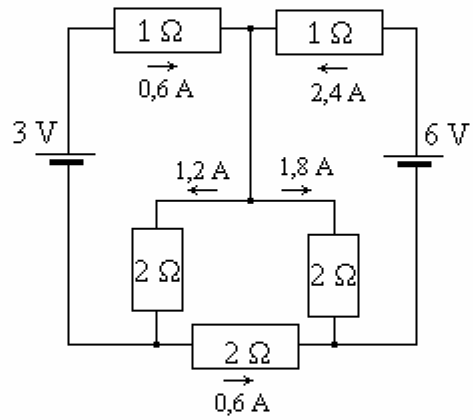
$P_{\min} = ?$ $P_{\max} = ?$ $P_{t1}/P_{t2} = ?$



A három 2 Ω-os ellenállást nem érdemes csillagkapcsolásra átalakítani. Írjuk fel a három hurokra bejelölt körüljárásnak megfelelően a Kirchhoff-féle huroktörvényt, és még két csomópontra a csomóponti törvényt:

$E_1 = I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3$
$E_2 = I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4$
$I_4 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5 - I_3 \cdot R_3 = 0$
$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$
$I_4 + I_5 = I_2$.
Az egyenletrendszer megoldása után:
I_1 = 0,6 A, I_2 = 2,4 A, I_3 = 1,2 A, I_4 = 1,8 A, I_5 = 0,6 A, *10 pont*
$P_1 = I_1^2 \cdot R_1$ = 0,36 W, P_2 = 5,76 W, P_3 = 2,88 W, P_4 = 6,48 W, P_5 = 0,72 W,
$P_{min} = P_1$ = 0,36 W, $P_{max} = P_4$ = 6,48 W *5 pont*

Így a telepek által leadott teljesítmények:
$P_{t1} = E_1 \cdot I_1$ = 1,8 W, $P_{t2} = E_2 \cdot I_2$ = 14,4 W, hányadosuk:
P_{t1}/P_{t2} = 1/8. *5 pont*
=========
Az áramokat mutatja a következő ábra (csak a javítás könnyítésért):



9. feladat (*Varga Zsuzsa*)
B = 0,8 T, d = 0,2 m, m = 10 g, v = 1,2 m/s,
C = 20 μF.
a) Q = ? b) v = 0 t = ?

a) A rúdban mozgatás közben $U = B\,d\,v$ feszültség indukálódik. Ennek hatására a vezetőben áram indul meg, és mivel nincs ellenállás, a kondenzátor nagyon gyorsan feltöltődik, és az áram megszűnik.
$Q = C\,U = C\,B\,d\,v$ = 3,84 μC. *10 pont*
b) Amíg áram folyik a rúdban, fellép a $\boldsymbol{F}_L = B\,d\,I$ Lorentz-erő, amely a rúd mozgatását akadályozza, tehát az állandó sebesség fenntartásához a rúdra $F = F_L$ erőt kell kifejtenünk. Az áram megszűnésével az akadályozó Lorentz-erő megszűnik, tehát a rúd állandó sebességgel mozog erő kifejtése nélkül is. Így a rúd állandó sebességgel fog mozogni, ha magára hagyjuk.
Megjegyzés: A valóságban a rudat megállítja a súrlódási erő, véges hosszúságú a sínpár, és a rúdnak is lehet ellenállása. *10 pont*

10. feladat (*Hilbert Margit*)
I= 0,50 μA, E_1 = 30 MeV = $4{,}8 \cdot 10^{-18}$ J, $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, Δt = 10 s, m = 10 g
$c = 129{,}79\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg} \cdot °\text{C}}$

N = ? E = ? ΔT = ?

Az áramerősség definíciója szerint:
$I = N \cdot q$, ahonnan $N = I/q = 3{,}125 \cdot 10^{12}$ 1/s. *8 pont*
A céltárgyra szállított energia: $E = N \cdot E_1\,\Delta t$ = 150 J. *6 pont*
Ez az energia melegíti fel a céltárgyat, ezért: $E = c \cdot m \cdot \Delta T$, innen ΔT = 115,5 °C. *6 pont*